

# **UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO**

Facultad de Ingeniería de mecánica eléctrica, ingeniería electrónica e  
Ingeniería de sistemas

**Escuela profesional de Ingeniería de sistemas**



## **MOVIMIENTO PARABOLICO DE UN PROYECTIL**

**CURSO.**

LABORATORIO DE FISICA

**DOCENTE.**

MACHACA CONDORI ÁLVARO DIEGO

**ALUMNO.**

ABAD POMA MAQUERA

**2024 – II**

**PUNO – PERÚ**

## 1. RESUMEN

El informe sobre el movimiento parabólico de un proyectil tuvo como propósito comprobar las ecuaciones teóricas que describen este tipo de movimiento, así como comparar los resultados teóricos con los datos experimentales en cuanto al alcance máximo, la velocidad inicial y el tiempo de vuelo a diferentes ángulos de lanzamiento. En el experimento, se utilizó un sistema de lanzamiento de proyectiles con un lanzador, fotopuertas y sensores para medir de manera precisa la velocidad y el tiempo de vuelo. Los resultados mostraron que, tal como predice la teoría, el ángulo de  $45^\circ$  proporciona el alcance máximo, con una alta concordancia entre los valores teóricos y experimentales en ángulos intermedios como  $40^\circ$  y  $45^\circ$ , donde los errores porcentuales fueron mínimos. Sin embargo, en ángulos más bajos ( $25^\circ$  y  $30^\circ$ ) y más altos ( $60^\circ$ ), los errores fueron más significativos, lo que se atribuye a factores como la variabilidad en la fuerza de lanzamiento o pequeñas imprecisiones en la medición de los ángulos. En general, el experimento validó las ecuaciones teóricas del movimiento parabólico, destacando que la velocidad inicial, el ángulo de lanzamiento y la gravedad son los factores clave que determinan la trayectoria y el alcance del proyectil. Asimismo, se reconoció la importancia de minimizar los errores experimentales para obtener resultados más precisos y confiables.

## 2. OBJETIVOS

- Comprobar las ecuaciones correspondientes al movimiento de un proyectil
- Comparar datos teóricos y experimentales del alcance máximo y la velocidad inicial
- Medir la velocidad de un proyectil y su tiempo de vuelo

## 3. FUNDAMENTO TEORICO

Considerando que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su propio peso, la segunda ley de Newton en forma de componentes rectangulares, indica que la aceleración como componente horizontal es nula y como componente vertical está dirigida hacia abajo realizando un movimiento igual a la de caída libre, entonces se cumple:

$$a_x = \frac{(\sum F_x)}{m} = 0$$
$$a_y = \frac{(\sum F_y)}{m} = \frac{(-mg)}{m} = -g$$

En virtud de la ecuación (1), se concluye que el movimiento puede definirse como una combinación de movimiento horizontal a velocidad constante y movimiento vertical uniformemente acelerado.

### 3.1. Movimiento parabólico de un proyectil

En este caso se lanza un objeto con cierto ángulo de elevación respecto a un plano horizontal de referencia, tal como se ve en la Figura 1. La velocidad en el punto origen o donde inicia su recorrido está representada por el  $(\vec{v}_0)$  (velocidad inicial), en este punto hacemos por conveniencia  $t = 0$ , “ángulo de tiro” como  $\theta_0$  de modo que se puede descomponer la velocidad inicial en:

#### 3.1.1. Una componente horizontal:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 ; \text{cte.}$$

Demostración MRU:

$$a_x = \frac{(\sum F_x)}{m} = 0$$
$$a_x = 0$$

Para el movimiento uniforme.

$$X = X_0 + V_0 x t$$

$$X = X_0 + V_0 x t$$

$$\frac{d(x)}{dt} = \frac{d(v_0 x t)}{dt}$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 ; \text{cte.}$$

### 3.1.2. Una componente vertical:

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

Demostración MUV.

$$a_y = \frac{(\sum F_y)}{m} = \frac{(-mg)}{m} = -g$$

$$a_y = -g$$

Para el movimiento uniformemente variado.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

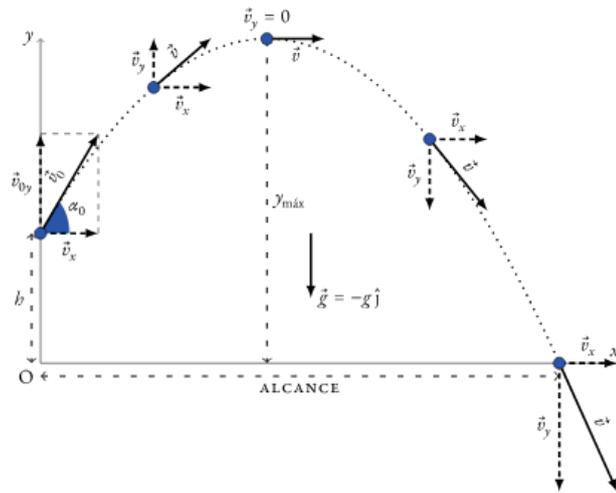
$$\frac{d(y)}{dt} = \frac{d\left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)}{dt}$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Puesto que la aceleración horizontal  $a_x$  es nula tal como se ve en la ecuación (1), la componente horizontal  $v_x$  de la velocidad permanece constante durante el movimiento, para cualquier instante posterior  $t > 0$ . Y la aceleración vertical  $a_y$ , es igual a  $-g$ , pero en ascenso lo cual genera una desaceleración del objeto.

**Figura 1**

Trayectoria de un proyectil, lanzado de un ángulo de elevación  $\theta_0$ , y con la velocidad inicial  $v_0$ .



Nota: la figura representa el movimiento parabólico de un objeto, mostrando los componentes que conforman a este tipo de movimiento. Recuperado de *Fisiquímicamente*. <https://fisiquimicamente.com/recursos-fisica-quimica/apuntes/1bach/movimiento-parabolico/>

### 3.1.3. Alcance en un instante cualquiera.

El vector velocidad  $v$  es tangente en todo instante a la trayectoria. Luego como  $v_x$  es constante, la abscisa “x” en un instante cualquiera es:

$$x = (v_0 \cos \theta_0) t$$

Demostración.

$$v_x = v_0 \cos \theta_0$$

$$\frac{d(x)}{dt} = v_0 \cos \theta_0$$

$$d(x) = v_0 \cos \theta_0 dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos \theta_0 dt$$

$$x = v_0 \cos \theta_0 \int_0^t dt$$

$$x = v_0 \cos \theta_0 (t - 0)$$

$$x = (v_0 \cos \theta_0) t$$

La integración demuestra que, en un tiro parabólico, la posición horizontal depende linealmente del tiempo debido a la velocidad constante en esa dirección. Este enfoque resalta que, al no haber fuerzas horizontales, el proyectil mantiene su velocidad en esa dirección. La integral refleja cómo el cambio en la posición se acumula a lo largo del tiempo, y cómo las condiciones iniciales (velocidad y ángulo) determinan el desplazamiento.

#### 3.1.4. Altura en un instante cualquiera.

$$y = v_0 \sin(\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Demostración.

$$v_y = v_0 \cdot \sin(\theta_0) - g \cdot t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$dy = (v_0 \cdot \sin(\theta_0) - g \cdot t) dt$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t (v_0 \cdot \sin(\theta_0) - g \cdot t) dt$$

$$\int_{y_0}^y dy = y - y_0$$

$$\int_0^t v_0 \cdot \sin(\theta_0) dt = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot t$$

$$\int_0^t -g \cdot t dt = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y - y_0 = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

La derivación de la ecuación de posición vertical mediante una integral definida destaca la interrelación entre las variables fundamentales en el movimiento de un proyectil. la velocidad inicial  $v_0$  determina la rapidez con la que el proyectil asciende, mientras que el ángulo de lanzamiento  $\theta_0$  influye en la componente vertical de esa velocidad. La gravedad  $g$  actúa como una fuerza constante que afecta el movimiento hacia abajo. Esta ecuación ilustra cómo estas variables interactúan para definir la trayectoria del proyectil en el espacio.

#### 3.1.5. Tiempo de subida

$$t_{sub} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

Demostración.

$$v_y = v_0 \cdot \sin (\theta_0) - g \cdot t$$

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima, la velocidad vertical  $v_y$  se convierte en 0. Por lo tanto, podemos igualar la ecuación 3 a cero:

$$0 = v_0 \cdot \sin (\theta_0) - g \cdot t_{sub}$$

$$g \cdot t_{sub} = v_0 \cdot \sin (\theta_0)$$

$$t_{sub} = \frac{v_0 \cdot \sin (\theta_0)}{g}.$$

La derivación de la ecuación del tiempo de subida, a partir de la ecuación de velocidad vertical ilustra la relación entre las variables clave en el movimiento de un proyectil. Esta ecuación muestra que el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima depende directamente de la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento. A medida que aumenta la velocidad inicial o el ángulo, el tiempo de subida también aumenta.

### 3.1.6. Tiempo de vuelo

$$2t_{sub} = 2 \frac{v_0 \cdot \sin (\theta_0)}{g}$$

Se sabe que el tiempo de vuelo es dos veces el tipo de subida.

$$t_{vuelo} = 2 \frac{v_0 \cdot \sin (\theta_0)}{g}$$

El tiempo de vuelo de un proyectil, representado por la ecuación, es fundamental para entender su trayectoria. Este tiempo está influenciado por la velocidad inicial  $v_0$  y el ángulo de lanzamiento  $\theta_0$ . A medida que aumenta la velocidad inicial, el tiempo de vuelo se extiende, permitiendo al proyectil alcanzar mayores alturas y distancias.

### 3.1.7. Altura máxima

$$h_{max} = \frac{v_0^2 (\sin \theta_0)^2}{2g}$$

Demonstración.

Ecuación 5.

$$y = v_0 \cdot \sin (\theta_0) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ecuación 6.

$$t_{sub} = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta_0)}{g}$$

$$y = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot t_{sub} - \frac{1}{2}g \cdot (t_{sub})^2$$

$$y = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \left( \frac{v_0 \cdot \sin(\theta_0)}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left( \frac{v_0 \cdot \sin(\theta_0)}{g} \right)^2$$

Primer término.

$$y = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{g}$$

Segundo término.

$$-\frac{1}{2}g \cdot \left( \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{g^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{g}$$

Juntamos.

$$y = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{g}$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

La demostración de la ecuación para la altura máxima, resalta la relación entre la velocidad inicial, el ángulo de lanzamiento y la gravedad. Esta ecuación muestra que, a mayor velocidad inicial y un ángulo de lanzamiento adecuado, se puede alcanzar una mayor altura. Además, ilustra cómo la aceleración gravitacional actúa como un factor limitante en el movimiento vertical.

### 3.1.8. Alcance máximo

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

Demostración.

Ecuación 4.

$$x = v_0 \cdot \cos(\theta_0) \cdot t$$

Tiempo de vuelo.

$$t_{sub} = 2 \frac{v_0 \cdot \sin(\theta_0)}{g}$$

Sustituimos.

$$x = v_0 \cdot \cos(\theta_0) \cdot t_{vuelo}$$

$$x = v_0 \cdot \cos(\theta_0) \cdot \left( \frac{2v_0 \cdot \sin(\theta_0)}{g} \right)$$

$$x = \frac{2v_0^2 \cdot \sin(\theta_0) \cdot \cos(\theta_0)}{g}$$

Aplicando la identidad trigonométrica  $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ .

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta_0)}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta_0)}{g}$$

La demostración de la ecuación del alcance máximo, resalta la importancia de la velocidad inicial y el ángulo de lanzamiento en el movimiento de proyectiles. Al sustituir el tiempo de vuelo en la ecuación de posición horizontal, se establece una relación directa entre estos factores y el alcance. Este resultado muestra que el alcance se maximiza a un ángulo de 45 grados, dado que  $\sin(90^\circ) = 1$ .

### 3.1.9. Ecuación de una parábola

$$y = x \cdot \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\theta_0)} \cdot x^2$$

Demostración.

Ecuación 4.

$$x = v_0 \cdot \cos(\theta_0) \cdot t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\theta_0)}$$

Ecuación 5.

$$y = v_0 \sin(\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sustituimos.

$$y = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot \left( \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\theta_0)} \right) - \frac{1}{2} g \cdot \left( \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\theta_0)} \right)^2$$

Primer término.

$$y = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta_0) \cdot x}{v_0 \cdot \cos(\theta_0)} = x \cdot \tan(\theta_0)$$

Segundo término.

$$-\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos^2(\theta_0)}\right)^2 = -\frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\theta_0)}$$

Juntamos.

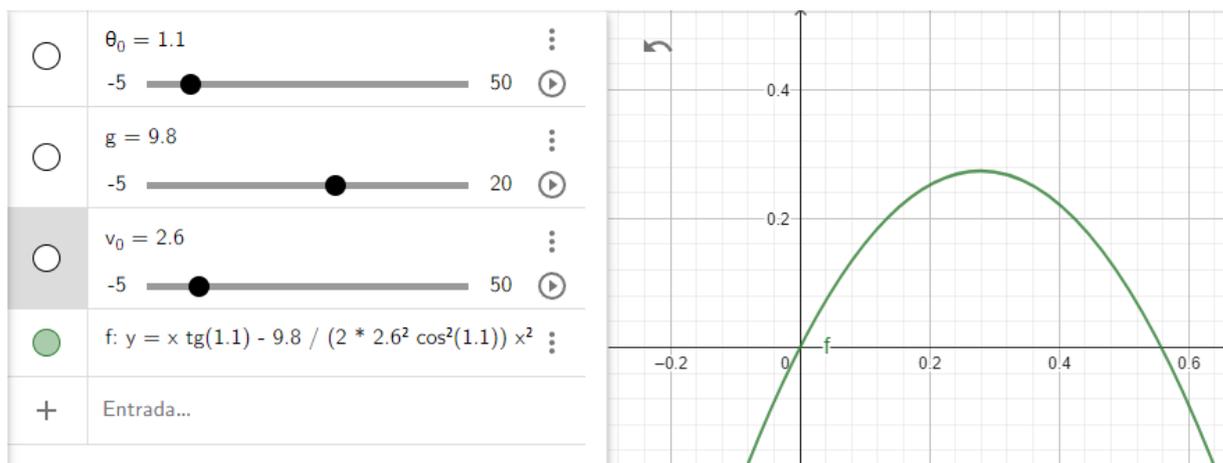
$$y = x \cdot \tan(\theta_0) - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\theta_0)}$$

$$y = x \cdot \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\theta_0)} \cdot x^2$$

La ecuación parabólica introduce la influencia de la gravedad, modelando la curvatura de la trayectoria parabólica. Este término revela cómo la aceleración gravitacional actúa para reducir la altura del proyectil a medida que se aleja del punto de lanzamiento. En conjunto, la ecuación ilustra la complejidad del movimiento proyectil, evidenciando cómo las variables interactúan y se manifiestan en una forma matemática que permite prever el comportamiento del proyectil en el espacio.

## Figura 2

Relación entre la altura “y” y la distancia horizontal “x” de un proyectil según la ecuación  $y = x \cdot \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2(\theta_0)} x^2$



Nota: La ecuación describe la trayectoria parabólica de un proyectil en función de la distancia y el ángulo de lanzamiento, considerando la gravedad de 9.8 m/s.

### 3.2. Teoría de errores

El conjunto de principios y métodos estadísticos conocidos como teoría de errores se emplea para analizar y cuantificar la incertidumbre en mediciones y experimentos. Esta teoría se centra en las discrepancias entre los valores medidos y los valores reales, y pretende proporcionar un marco para evaluar y minimizar estos errores en los resultados obtenidos (Taylor, 1997).

A menudo, en los laboratorios existe márgenes de error dependiendo del experimentador como sistemáticos, los cuales, hay que compara un valor obtenido por medición con un valor estándar o generalmente aceptado. Para cuantificarlas, se puede calcular el porcentaje de error, que se define del siguiente modo:

$$E\% = \frac{\text{Valor teorico} - \text{Valor experimental}}{\text{Valor teorico}} \times 100\%$$

#### 4. EQUIPO Y MATERIALES

**Tabla 1**

*Lista de insumos e instrumentos necesarios para la experimentación del movimiento parabólico.*

Computadora personal.	
Programa capstone instalado.	
Interface Science workshop.	
Sistema de lanzador de proyectiles (ME-6831).	
Adaptador para fotopuerta.	
Dos fotopuertas (ME-6821).	

Papel carbón, papel bond.	
Esfera de plástico (proyectil).	
Accesorio de tiempo de vuelo.	
Una regla de 1m.	
Soporte universal, flexómetro 2m.	
Abrazadera.	
Gafas protectoras.	

## 5. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Procedimiento para configuración de equipos y accesorios.

### 5.1. Movimiento parabólico

- Corroborar la adecuada conexión e instalación de la interface.
- Ingresar al programa Capstone.
- Seleccionar Fotopuerta, de la lista de sensores y efectuar la conexión usando los cables para transmisión de datos, de acuerdo a lo indicado por Capstone:
- Ingresar a la configuración del temporizador, para la fotopuerta y el accesorio para tiempo de vuelo.
- Colocar las fotopuertas en el adaptador y luego en el extremo del lanzador de proyectiles
- Efectuar el montaje de dispositivos y accesorios tal como se muestra en la Figura 3.

### Figura 3.

*Disposición de la maqueta experimental con los materiales y equipos.*



## 5.2. Segunda actividad (determinar la velocidad inicial)

- a. Verificar la elevación angular del lanzador de proyectiles.
- b. Insertar con ayuda del tubo atascador la esfera de plástico o acero, en la primera posición (alcance corto) de compresión del resorte según sea el caso.
- c. Verificar la puntería, esta debe coincidir con la dirección del accesorio de tiempo de vuelo
- d. Pulsar el botón inicio.
- e. Tirar suavemente del cable que activa el disparador.
- f. Verificar el punto de alcance máximo correspondiente; de ser necesario ajuste la distancia de ubicación del accesorio de tiempo de vuelo.
- g. Anotar los valores del alcance máximo, tiempo y velocidad inicial.
- h. Variar la posición angular tomando como mínimo 3 repeticiones de cada ejemplar.

**Figura 4.**

*Proceso de recolección de datos de velocidad inicial, tiempo y alcance máximo mediante la maqueta experimental.*



## 6. RESULTADOS.

En este contexto, para poder hallar la velocidad inicial teórica debemos utilizar la siguiente formula:

$$t_{vuelo} = 2 \frac{v_0 \cdot \sin(\theta_0)}{g}$$

Donde se debe utilizar el dato del tiempo de vuelo ejecutado en la experimentación, teniendo en cuenta que la gravedad es de 9.8 m/s<sup>2</sup>, luego derivar la ecuación a la velocidad inicial:

$$v_0 = \frac{t \times g}{2 \times \sin \theta_0}$$

**Tabla 2.**

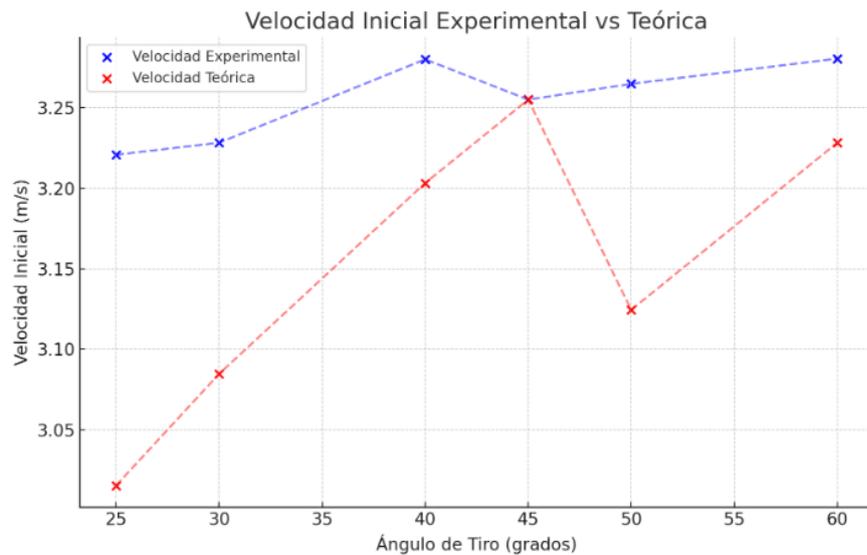
*Comparación de la Velocidad Inicial Experimental y Teórica en Función del Ángulo de Tiro*

Ángulo de tiro	Intento	Tiempo de vuelo (s)	Velocidad inicial experimental (m/s)	Velocidad inicial teórica (m/s)	Error porcentual (%)
25°	1	0.26	3.26	3.01	8.30
	2	0.26	3.27	3.01	8.64
	3	0.26	3.27	3.01	8.64
	Promedio	0.26	3.27	3.01	8.53
30°	1	0.31	3.23	3.04	6.25
	2	0.31	3.24	3.04	6.58
	3	0.32	3.25	3.14	3.50
	Promedio	0.31	3.24	3.07	5.44
40°	1	0.42	3.20	3.20	0.00
	2	0.42	3.20	3.20	0.00
	3	0.42	3.19	3.20	0.31
	Promedio	0.42	3.20	3.20	0.10
45°	1	0.47	3.17	3.26	2.76
	2	0.46	3.15	3.19	1.25
	3	0.46	3.17	3.19	0.63
	Promedio	0.46	3.16	3.21	1.55
50°	1	0.49	3.12	3.13	0.32
	2	0.50	3.16	3.20	1.25
	3	0.50	3.13	3.20	2.19

	Promedio	0.50	3.14	3.18	1.25
1047	1	0.57	3.12	3.22	3.10
60°	2	0.57	3.10	3.22	3.77
	3	0.57	3.11	3.22	3.42
	Promedio	0.57	3.11	3.22	3.43

**Figura 4.**

*Gráfico de dispersión de la velocidad inicial experimental y teórica en función del ángulo de tiro,*



Este gráfico presenta la relación entre las velocidades iniciales experimentales y teóricas en función de diversos ángulos de lanzamiento. La disposición de los datos permite una comparación detallada, facilitando la identificación de posibles desviaciones entre los valores obtenidos en el laboratorio y los estimados teóricos, y permitiendo así una apreciación cuantitativa de la fidelidad experimental respecto a los modelos de predicción.

Para la tabla 3, es necesario utilizar la ecuación del alcance máximo para hallar el valor teórico.

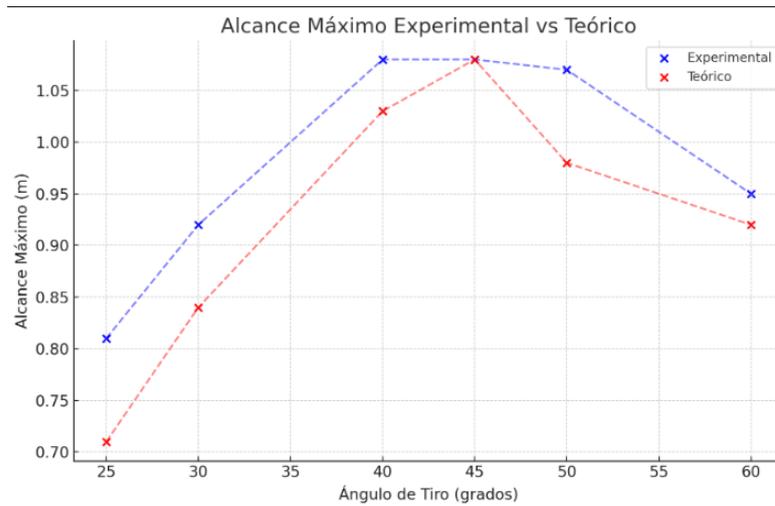
$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta_0)}{g}$$

**Tabla 3.***Análisis del Alcance Máximo Experimental y Teórico en Relación con el Ángulo de Tiro.*

Ángulo de tiro	Intento	Alcance máximo experimental (m)	Alcance máximo teórico (m)	Error porcentual (%)
0.437 25°	1	0.81	0.71	14.0
	2	0.81	0.71	14.0
	3	0.81	0.71	14.0
	Promedio	0.81	0.71	14.0
0.524 30°	1	0.92	0.82	12.2
	2	0.92	0.82	12.2
	3	0.93	0.87	6.90
	Promedio	0.92	0.84	10.4
0.698 40°	1	1.07	1.03	3.88
	2	1.08	1.03	4.85
	3	1.08	1.03	4.85
	Promedio	1.08	1.03	4.53
0.785 45°	1	1.10	1.08	1.85
	2	1.08	1.04	3.85
	3	1.09	1.04	4.80
	Promedio	1.08	1.05	3.50
0.873 50°	1	1.07	0.98	9.18
	2	1.08	1.03	4.85
	3	1.07	1.03	3.88
	Promedio	1.07	1.01	5.97
1047 60°	1	0.96	0.92	4.35
	2	0.95	0.92	3.26
	3	0.95	0.92	3.26
	Promedio	0.95	0.92	3.62

**Figura 5.**

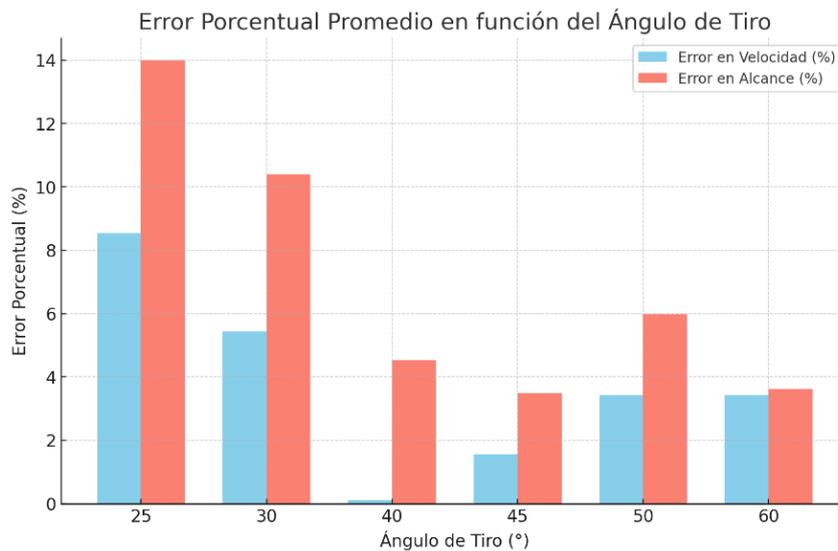
*Gráfico de dispersión en relación del alcance máximo experimental y teórico entre el ángulo de tiro.*



En este gráfico se examina la correspondencia entre los valores experimentales y teóricos del alcance máximo del proyectil a distintos ángulos de tiro. La representación gráfica posibilita un análisis preciso de la relación entre el ángulo de lanzamiento y el alcance del proyectil, destacando las posibles divergencias experimentales frente a los resultados previstos por la teoría.

**Figura 6.**

*Gráfico de barras sobre la diferencia de error porcentual entre la velocidad inicial y alcance máximo.*



Este gráfico de barras ofrece una visión cuantitativa de la variabilidad en el error porcentual entre las mediciones experimentales y los valores teóricos para la velocidad inicial y el alcance máximo del proyectil. La visualización sistemática de los errores permite evaluar la consistencia y exactitud de los resultados experimentales y refleja el impacto del ángulo de lanzamiento sobre la precisión de los datos obtenidos.

## 7. ANALISIS DE RESULTADOS

La **Tabla 2** compara la velocidad inicial experimental teórica para distintos ángulos de lanzamiento. Al analizar los datos, se aprecia que los errores porcentuales disminuyen a medida que el ángulo de lanzamiento aumenta hasta alcanzar valores de  $40^\circ$  y  $45^\circ$ . En estos ángulos, las diferencias entre lo experimental y lo teórico son mínimas, lo que sugiere una mayor precisión del modelo teórico en tales condiciones. Esta reducción de error podría deberse a que, a estos ángulos, el sistema de lanzamiento presenta una estabilidad superior, minimizando así las variaciones en la fuerza de lanzamiento y reduciendo la influencia de otros factores externos. No obstante, en ángulos más bajos, particularmente  $25^\circ$  y  $30^\circ$  se observan discrepancias mayores, con errores que superan el 5%. Este patrón sugiere que, en estos ángulos, la velocidad inicial del proyectil podría estar sujeta a variaciones adicionales posiblemente inducidas por irregularidades en el mecanismo de lanzamiento. Además, es posible que la disposición experimental o incluso ligeras desviaciones en el ángulo de tiro afectan a los resultados experimentales.

La **Figura 4** representa un gráfico de dispersión que permite una comparación visual entre la velocidad inicial experimental y teórica, en función de los ángulos de tiro. Los puntos de datos correspondientes a ángulos intermedios como  $40^\circ$  y  $50^\circ$  se alinean cercanamente con la línea teórica, indicando una mínima dispersión y por ende una alta precisión en la velocidad inicial medida experimentalmente. Sin embargo, para ángulos bajos y altos, los valores experimentales presentan una ligera desviación de los teóricos. Este fenómeno puede deberse a la menor estabilidad del sistema en ángulos de tiro extremos.

En la **Tabla 3**, se examina la correspondencia entre el alcance máximo experimental y el teórico en función de distintos ángulos de tiro. La teoría predice que el alcance máximo de un proyectil se alcanza a un ángulo de  $45^\circ$  y este valor es corroborado en la tabla. Para ángulos cercanos a este valor óptimo, el error porcentual es reducido de 3.5%, lo cual valida la teoría y respalda la consistencia de los resultados experimentales en condiciones ideales. Sin embargo, para ángulos menores, como  $25^\circ$  y  $30^\circ$  el error porcentual incrementa notablemente, superando el 10%. Abogando a errores humanos como la mala medida del alcance máximo.

La **Figura 5** proporciona un análisis visual de la relación entre el alcance máximo experimental y teórico, demostrando cómo el ángulo de tiro influye en el desplazamiento horizontal del proyectil. La relación parabólica esperada entre el alcance y el ángulo es visible, donde los ángulos de tiro forma un patrón donde su alcance es mayor al teórico, hasta el punto  $45^\circ$  lo que puede indicar que en este punto el Angulo tiene una precisión de acuerdo a sus repeticiones y como su margen es menor a 4%.

En definitiva, la **Figura 6** muestra un gráfico de barras que destaca las variaciones en el error porcentual acumulado entre la velocidad inicial y alcance máximo experimental en función del ángulo de tiro. A través de esta representación, se observa que el error es notablemente mayor en ángulos extremos (como

25° y 30°), lo que reafirma la dificultad de mantener precisión en estas condiciones de tiro. Por otro lado, en ángulos intermedios, especialmente de 40° y 50° el error porcentual se minimiza, destacando la consistencia experimental con los modelos teóricos al igual que debemos tener en cuenta la precisión de un rango del 5 al 10%..

En síntesis, el análisis de los resultados experimentales y sus comparaciones teóricas evidencia una tendencia de alta concordancia en ángulos intermedios, lo que refleja la aplicabilidad del modelo teórico idealizado bajo condiciones controladas. Las variaciones en los ángulos extremos sugieren la presencia de factores no considerados en la teoría, como efectos de resistencia o variabilidad en la fuerza de lanzamiento, lo cual subraya la complejidad de replicar las condiciones teóricas en un entorno experimental.

## **8. CUESTIONARIO**

### **8.1. ¿Cuáles son los factores que influyen en el movimiento parabólico?**

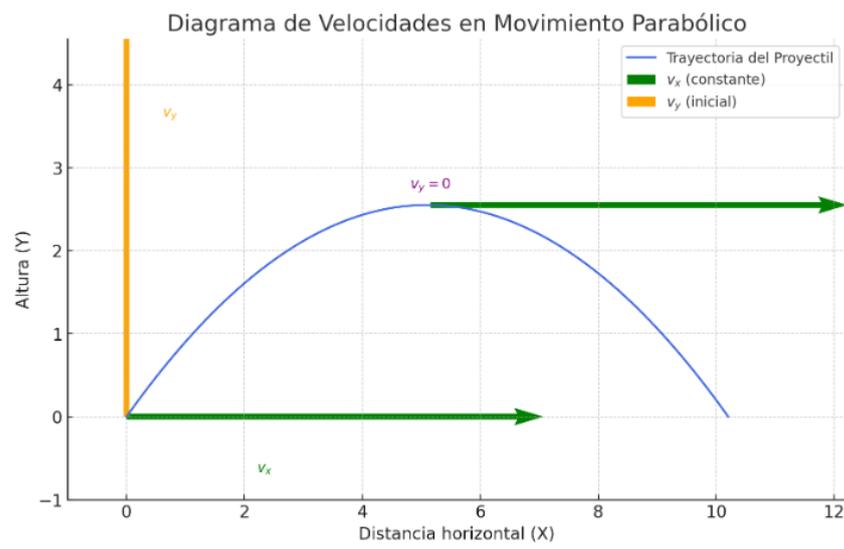
En el movimiento parabólico, los factores principales que influyen son la velocidad inicial ( $v_0$ ) del proyectil, el ángulo de lanzamiento ( $\theta_0$ ) y la gravedad ( $g$ ). La velocidad inicial y el ángulo determinan tanto el alcance como la altura máxima que alcanzará el proyectil, mientras que la gravedad afecta la aceleración en la dirección vertical. Además, aunque no se considera en el modelo teórico, en un entorno real, la resistencia del aire también puede influir, ralentizando el proyectil y modificando ligeramente su trayectoria.

### **8.2. ¿Qué fuentes de error se presentan en el experimento?**

En el experimento, las principales fuentes de error incluyen la variabilidad en la fuerza aplicada en el lanzamiento, inexactitudes en la medición de los ángulos de lanzamiento, disfuncionalidades en la medición del alcance, poca estabilidad en el sistema lanzador. Además, las imprecisiones en la alineación del proyectil también afectaron a los resultados experimentales frente a los teóricos.

### **8.3. Describe cómo cambian la velocidad en la dirección "X" y la velocidad en la dirección "Y" del proyectil durante su vuelo. Dibuje un diagrama.**

- La **velocidad en la dirección X** (horizontal) permanece constante, ya que no existen fuerzas actuando en esa dirección en un modelo ideal. Esto se debe a que la aceleración horizontal ( $a_x$ ) es nula.
- La **velocidad en la dirección Y** (vertical) cambia debido a la acción de la gravedad. Inicialmente, la componente vertical de la velocidad disminuye hasta llegar a cero en el punto más alto de la trayectoria, y luego aumenta nuevamente en magnitud, pero en dirección opuesta mientras el proyectil cae.



8.4. Compare los resultados obtenidos en la tabla del tiempo de vuelo experimental con el tiempo de vuelo calculado teóricamente y determine el error porcentual correspondiente.

Angulo (°)	Tiempo de Vuelo Experimental (s)	Tiempo de Vuelo Teórico (s)	Error Porcentual (%)
25	0.26	0.276	5.80
30	0.31	0.327	5.06
40	0.42	0.420	0.05
45	0.46	0.462	0.39
50	0.50	0.500	0.05
60	0.57	0.566	0.78

8.5. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, ¿en qué dirección actuaba la fuerza sobre el proyectil durante el vuelo? ¿En qué dirección se aceleraba el proyectil durante el vuelo?

Sin resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la **gravitacional**, que siempre apunta hacia abajo, es decir, en la dirección vertical negativa ( $-y$ ). En consecuencia, la aceleración del proyectil durante todo el vuelo también se dirige hacia abajo, con una magnitud constante igual a la aceleración debida a la gravedad ( $9.8\text{m/s}^2$ ).

8.6. ¿Qué ángulo lanzó el proyectil más lejos? Explica conceptualmente por qué crees que este ángulo proporciona el máximo alcance.

El ángulo que lanzó el proyectil más lejos fue de 45°. Conceptualmente, este ángulo proporciona el máximo alcance porque optimiza las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial. A 45°, la velocidad inicial se divide equitativamente entre las direcciones horizontal y vertical, logrando así el mejor equilibrio entre altura y distancia horizontal, lo que permite que el proyectil permanezca más tiempo en el aire y alcance su máxima distancia horizontal en un entorno sin resistencia al aire.

**8.7. ¿El alcance máximo horizontal puede llegar a ser igual a la máxima altura del proyectil?  
Si es así, encontrar el ángulo de disparo para el cual se cumple.**

En teoría, el **alcance máximo horizontal (R)** solo puede ser igual a la **altura máxima (H)** en condiciones específicas y a un ángulo de disparo de **76° aproximadamente**. Para que R=H, se requiere que las componentes de la velocidad inicial y la influencia de la gravedad produzcan una trayectoria particular, pero este escenario es raro y, generalmente, el alcance es mayor que la altura máxima en movimientos parabólicos.

**8.8. ¿Qué ángulo se ha empleado para obtener una máxima altura en este experimento?  
Demostrar.**

La altura máxima se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

<b>Angulo (°)</b>	<b>Tiempo de Vuelo Experimental (s)</b>	<b>Altura Maxima Teórica (m)</b>
<b>25</b>	0.26	0.18
<b>30</b>	0.31	0.25
<b>40</b>	0.42	0.38
<b>45</b>	0.46	0.43
<b>50</b>	0.5	0.48
<b>60</b>	0.57	0.56

**8.9. Proporciona una explicación conceptual de por qué el alcance fue aproximadamente el mismo cuando 30° y 60°.**

El alcance de un proyectil lanzado en ángulos complementarios (por ejemplo, 30° y 60°) es aproximadamente igual debido a que la **componente horizontal de la velocidad inicial** resulta ser la misma en ambos casos. Matemáticamente, el alcance máximo R se calcula mediante la fórmula:

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta_0)}{g}$$

Cuando los ángulos de lanzamiento son complementarios, es decir,  $\theta=30^\circ$  y  $60^\circ$ , el valor de  $\sin(2\theta)$  es igual para ambos (ya que  $\sin(60^\circ) = \sin(120^\circ)$ ). Esto significa que el producto de las componentes de la velocidad horizontal y vertical es el mismo en ambos ángulos.

**8.10. ¿Cuál es el ángulo que maximiza el alcance del proyectil? ¿Por qué?**

El ángulo que maximiza el alcance de un proyectil en ausencia de resistencia del aire es  $45^\circ$ . Este ángulo proporciona el máximo alcance porque equilibra perfectamente las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil. Al lanzar el proyectil a  $45^\circ$ , se asegura que ambas componentes sean iguales, permitiendo que el proyectil mantenga un tiempo óptimo en el aire (gracias a la componente vertical) y una distancia horizontal máxima (gracias a la componente horizontal). Esta combinación resulta en el mayor desplazamiento posible en la dirección horizontal antes de que el proyectil toque el suelo.

**8.11. ¿Cuál es la aceleración de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba?  
¿Cuál es la aceleración del proyectil hacia abajo? ¿Es positiva o negativa? Explica tus razones.**

La aceleración de un proyectil en movimiento vertical, ya sea hacia arriba o hacia abajo, es constante y siempre igual a la aceleración debida a la gravedad:

$$g = 9.8\text{m/s}^2$$

Esta aceleración actúa siempre hacia abajo (en la dirección negativa del eje  $y$ ), independientemente de si el proyectil se está moviendo hacia arriba o hacia abajo.

Cuando el proyectil cae hacia abajo, sigue experimentando la misma aceleración hacia abajo, lo que incrementa su velocidad en esa dirección. La aceleración es negativa cuando se toma hacia abajo como la dirección negativa en el sistema de coordenadas. Este signo negativo indica que la aceleración se opone al movimiento inicial del proyectil al subir y actúa en la misma dirección cuando el proyectil desciende.

## 9. CONCLUSIONES

En conclusión, el estudio del movimiento parabólico de un proyectil ha permitido corroborar y analizar, desde una perspectiva experimental, los principios teóricos que rigen este tipo de movimiento en condiciones ideales. A través de la comparación entre los resultados teóricos y experimentales de variables clave, como la velocidad inicial, el alcance máximo y el tiempo de vuelo en diferentes ángulos de lanzamiento, se observó una notable concordancia en ángulos intermedios (especialmente en torno a los  $45^\circ$ ), que se identificaron como los más óptimos para maximizar el alcance horizontal. En ángulos complementarios, como  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , los resultados han evidenciado alcances similares, lo cual concuerda con la teoría al establecer que la componente horizontal de la velocidad es la misma en estos casos.

Los factores de error detectados, como imprecisiones en la medición de ángulos, o ligeras variaciones en la fuerza de lanzamiento, explican las pequeñas discrepancias observadas en los resultados experimentales, particularmente en ángulos más bajos y elevados. Estos hallazgos destacan la importancia de controlar y minimizar las fuentes de error para lograr una mayor fidelidad experimental y subrayan las limitaciones del modelo teórico idealizado cuando se aplica en un entorno real.

En términos generales, el experimento valida las ecuaciones que describen el movimiento parabólico, resaltando el rol de la gravedad como la única fuerza actuante sobre el proyectil y mostrando que el tiempo en el aire, la altura máxima y el alcance dependen estrechamente de la velocidad inicial y el ángulo de tiro. Estos resultados no solo confirman los conceptos teóricos fundamentales, sino que también demuestran la aplicabilidad práctica de las leyes físicas en la descripción del movimiento de cuerpos en el espacio, proporcionando una comprensión profunda de las interacciones entre velocidad, tiempo, y aceleración en sistemas proyectiles.

## 10. REFERENCIAS

- Fisiquímicamente. (n.d.). Movimiento parabólico. Recuperado de <https://fisiquimicamente.com/recursos-fisica-quimica/apuntes/1bach/movimiento-parabolico/>
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2018). Física para ciencias e ingeniería con física moderna (9a ed.). Cengage Learning.
- Tipler, P. A., & Mosca, G. (2014). Física para la ciencia y la tecnología (6a ed.). Reverté.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2014). Fundamentos de física (10a ed.). Wiley.
- Giancoli, D. C. (2016). Física: Principios con aplicaciones (7a ed.). Pearson Educación.
- Taylor, J. R. (1997). An introduction to error analysis: The study of uncertainties in physical measurements (2a ed.). University Science Books.